

Title	Constructions of Fibered 2-knots
Author(s)	斎藤, 昌彦
Citation	数理解析研究所講究録 (1987), 620: 83-88
Issue Date	1987-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/99885">http://hdl.handle.net/2433/99885</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## Constructions of Fibered 2-knots

東大理 斎藤 昌彦 (Masahico Saito)

Fibered 2-knots の構成法としてよく知られたものには, Zeeman の *twist spinning* とその拡張と, Asano-Yoshikawa の方法とがあるが, 前者は, fiber は豊富にできるが *monodromy* には *finite order* という制限がつき, 後者は, *monodromy* は豊富にできるが, fiber は  $\text{punc}(\#S^2 \times S^1)$  だけである. この, fiber の豊富さと *monodromy* の豊富さとの背反関係は, fiber の *Thurston norm* と深いにかかわりがあり, fiber が *irreducible* で豊富な *monodromy* をもつ fibered 2-knot を構成することの困難さにつながっている.

( [3] 参照 )

特に fiber が  $\text{punc}T^3$  の場合は, [1] でくわしく調べられているが, ここでは, [3] で使われた方法を一般化した形で述べる.

構成法

$K$  を  $S^4$  内の fibered ribbon 2-knot (fiber は  $\text{punc}(\#S^2 \times S^1) = (\#S^2 \times S^1)^0$  であり, monodromy を  $h$  とすれば,  
 $S^4 - K = (\#S^2 \times S^1)^0 \times I / h$  とかける) で, 次の (i), (ii) を満たすものとする。

(i) essential simple closed curve  $\gamma \subset (\#S^2 \times S^1)^0$  で,  
 $h|_{\gamma} = \text{identity}$ ,

$\gamma$  は homologous to 0 in  $H_1((\#S^2 \times S^1)^0; \mathbb{Z})$

をみたすものが存在する。

(ii)  $\Gamma = \gamma \times I / h \subset (\#S^2 \times S^1)^0 \times I / h = S^4 - K \subset S^4$

とするとき,  $\Gamma \cong T^2$  であるが, この  $\Gamma$  が  $S^4$  内で

unknotted である。(i.e. solid torus  $S^1 \times D^2$  を bound する)

このとき,  $\Gamma$  に沿って "equivariant  $\frac{1}{p}$ -Dehn surgery"  
 (各 fiber 内の  $\gamma$  に沿って " $\frac{1}{p}$ -surgery" となるような,  $S^4$  内での  
 $\Gamma$  に沿った surgery) をすると, 新しい fibered 2-knot  $\tilde{K} \subset S^4$   
 ができる。(用語の定義と証明については [3] 参照)

$\tilde{K}$  の fiber は  $(\#S^2 \times S^1)^0$  を  $\gamma$  に沿って " $\frac{1}{p}$ -surgery" した  
 ものであり, monodromy は  $h$  から誘導されるものである。

とくに, fiber の 1次元 homology 群上は, もとの  $K$  と同じなので,  
 Alexander polynomial は不変である。

例

$\#_4 S^2 \times S^1$  内に, fig. 1 のような simple closed curve  $\gamma$  をとる。

$\#_4 S^2 \times S^1 = (\natural_4 S^1 \times D^2) \cup_0 (\natural_4 S^1 \times D^2)$  であるが,  $F = \partial(\natural_4 S^1 \times D^2)$  とおく。(F は fig. 1 において, ちょうど紙面に相当する。)

$\gamma \subset F$  であることに注意する。また,  $\#_4 S^2 \times S^1$  内に, embedded tori  $T_i$  ( $i = -2, -1, 0, 1, 2$ ) を fig. 2 ~ 6 の様にとる。

$T_i$  は  $\gamma$  と disjoint であり, また,  $F$  に関して対称である。

$T_i$  に沿った "right handed round Dehn twist" (right handed Dehn twist  $\times S^1$ , fig. 7 参照) を  $\tau_i$  とし,

$$h = \tau_2 \circ \tau_1 \circ \tau_0 \circ \tau_{-1} \circ \tau_{-2} : \#_4 S^2 \times S^1 \rightarrow$$

とおく。 $h$  は  $F$  に関して対称であり,  $h$  が induce する automorphisms

$h_\# : \pi_1(\#_4 S^2 \times S^1) \rightarrow$ ,  $h_* : H_1(\#_4 S^2 \times S^1; \mathbb{Z}) \rightarrow$  について, 次のことが成り立つ。

$$(1) \text{ 群 } \langle x_1, x_2, x_3, x_4, t \mid t, tx_1t^{-1}h_\#(x_1)^{-1}, \dots, tx_4t^{-1}h_\#(x_4)^{-1} \rangle$$

は Andrews-Curtis moves で trivial presentation になる。

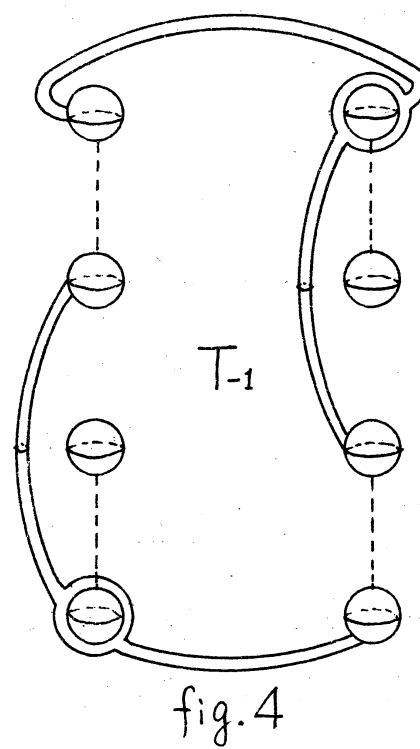
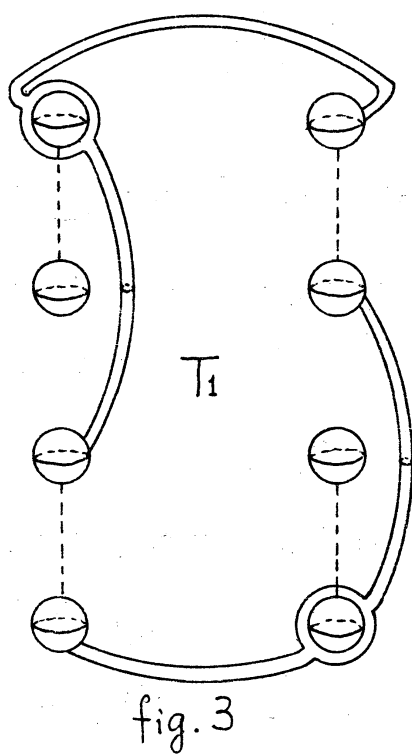
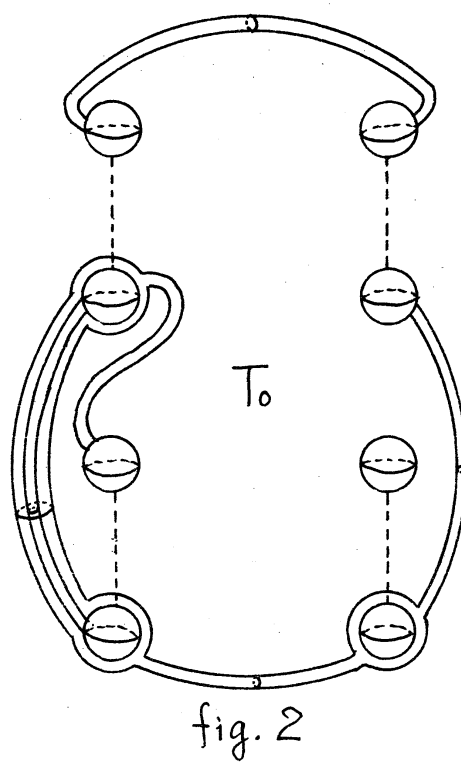
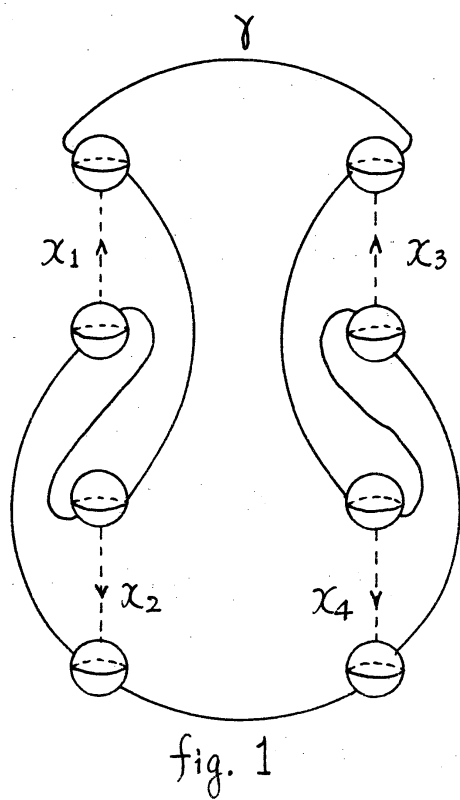
( $x_1, \dots, x_4$  は fig. 1 に図示された  $\pi_1(\#_4 S^2 \times S^1)$  の生成元)

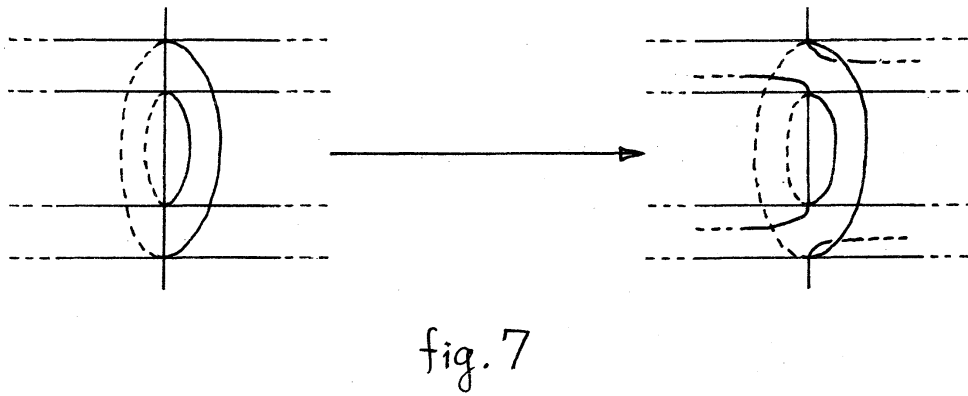
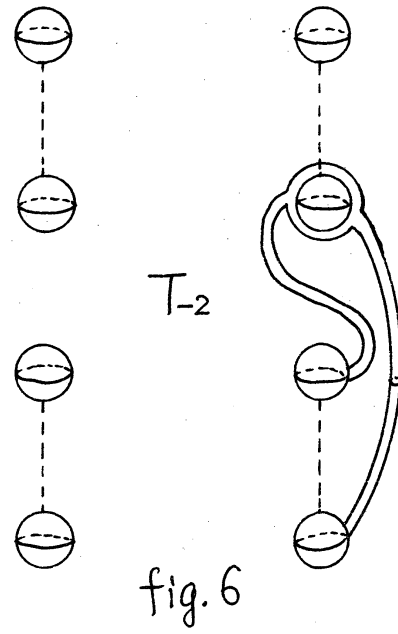
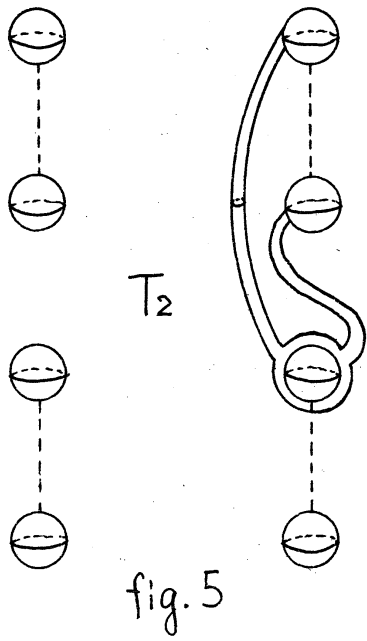
$$(2) \det(tI - h_*) = t^4 - 6t^3 + 9t^2 - 6t + 1$$

したがって Asano-Yoshikawa の方法により,  $h$  を monodromy とする

fibered ribbon 2-knot  $K \subset S^4$  ができ,  $\gamma$  は  $h$  で不変である。

また,  $B = (\natural_4 S^1 \times D^2) \times I / h$  は homotopy 4-ball,  $\partial B$  は homotopy 3-sphere である。  $\partial B \cap \Gamma = \gamma \times I / h$  であるから,





$\Gamma$  は  $S^4$  内で homotopically unknotted である。したがって構成法の (i) は満たし, (ii) は "unknotted" のかわりに "homotopically unknotted" であるような  $K, Y$  が得られた。これから homotopy  $S^4$  内の fibered 2-knot  $\tilde{K}$  で, fiber が irreducible であるものが構成できる。これが実際  $S^4$  と diffeomorphic であることを示すためには, [2] で用いられた様に, Montesinos の handle presentation で, Andrews-Curtis moves を handle sliding で実現しなければならない。

(この例自体は (2) の Alexander polynomial の対称性からしても [3] の例と一致してしまう可能性がある。)

### References

- [1] I.R. Aitchison, J.H. Rubinstein  
Fibered knots and involutions on homotopy spheres  
Contemporary Math. A.M.S. 35 (1984) 1-74
- [2] I.R. Aitchison, D.S. Silver  
On certain fibered ribbon disc pairs (preprint)
- [3] M. Saito  
Fibered 2-knots and Thurston norm  
数理解析研究所講究録 575 (1985) 198-212